Méthodologie

Kylliann De Santiago

Lundi 24 Octobre 2022

Section 1

Exercice

Exercice 1

Ecrire les propositions suivantes à l'aide de connecteurs logiques et de quantificateurs, et dire si elles sont vraies ou fausses (sauf pour les 3. et 4.) :

1. Il existe trois réels tous distincts et tous strictement inférieurs à un réel donné arbitraire
2. Il existe un nombre rationnel compris entre $\sqrt(2)$ et $\sqrt(3)$.
3. La fonction f est croissante (où f : $R \to R$ est une fonction donnée)
4. La fonction f n'est pas strictement croissante (où f : $R \to R$ est une fonction donnée)
5. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre égal au carré du premier.
6. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre dont le carré est le premier.

Correction

1. Il existe trois réels tous distincts et tous strictement inférieurs à un réel donné arbitraire

Soit $M \in \mathbb{R}$,

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R}, x < y < z < M$$

2. Il existe un nombre rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

$$\exists x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

3. La fonction f est croissante (où f : R $\rightarrow$ R est une fonction donnée)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

4. La fonction f n'est pas strictement croissante (où f : R $\rightarrow$ R est une fonction donnée)

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \wedge (f(x) \geq f(y))$$

(Le symbole $\wedge$ signifie “ET”)

5. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre égal au carré du premier.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \; y = x^2$$

6. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre dont le carré est le premier.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \; y^2 = x$$

Exercice 2

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 2 \implies x^2 \leq 4)$
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,$ n et p sont pairs $\Leftrightarrow n + p$ est pair

Correction

1. $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 2 \implies x^2 \leq 4)$

$\neg P : \exists x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \wedge x^2 > 4)$.

(Le symbole $\neg P$ signifie "NON(P)" et $\wedge$ signifie "ET")

Prenons par exemple : $x = -3$.

$x \in \mathbb{R}, x \leq 2$ et $x^2 > 4$

On a prouvé que $\neg P$ est vraie, donc P est fausse.

2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n$ et p sont pairs $\Leftrightarrow n+p$ est pair

Pour cette proposition, il faut travailler sur l'implication et la réciproque.

On commence par l'implication :
$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n$ et p sont pairs $\Rightarrow n+p$ est pair

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n$ et p pairs

$n = 2k$ et $p = 2k'$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n+p &= 2k + 2k' \\ &= 2(k+k') \end{aligned}$$

Donc $n+p$ est pair, car $k+k' \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n$ et p sont pairs $\Rightarrow n+p$ est pair est vraie.

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n + p$ est pair $\Rightarrow$ n et p sont pairs

Prenons, par exemple, $n = 3$ et $p = 5$, on a donc

$$n + p = 8$$

On a donc $n + p$ qui est pair MAIS n et p ne sont pas pairs.

Donc la **réciproque est fausse** !

Conclusion, la proposition est fausse, car la réciproque est fausse.

Section 2

Ensemble

Définition

Un ensemble est une collection d'objets deux à deux distincts appelés éléments. On peut définir un ensemble de deux manières :

- en extension : on donne la liste des éléments ;
- en compréhension : on donne une propriété commune vérifiée par les éléments de l'ensemble.

Ensembles classiques de nombres :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers ;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0\}$;
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;

Par exemple, l'élément 1 est inclus dans $\mathbb{N}$, on note donc $1 \in \mathbb{N}$.

Sous-ensemble

L'ensemble A est un sous-ensemble de B si tous les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit, $x \in A \implies x \in B$.

On le note $A \subset B$ (A inclus dans B).

Remarque 1 : On peut aussi le noter $A \subseteq B$ (A inclus dans B).

Remarque 2 :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Union / Intersection

Soient A et B, deux ensembles :

- On note $A \cup B$ l'union des ensembles A et B.
  $A \cup B = \{$éléments de A **OU** de B$\}$
- On note $A \cap B$ l'intersection des ensembles A et B.
  $A \cap B = \{$éléments de A **ET** de B$\}$

Remarque : Si l'intersection est vide, nous obtenons l'ensemble $\emptyset$ appelé l'ensemble vide.

Ensembles complémentaires

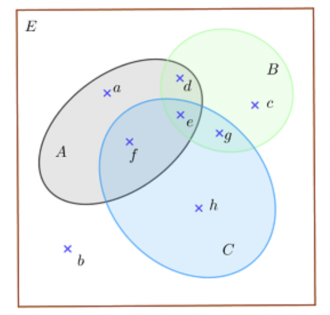
Soit A un sous-ensemble de E.

On note $\bar{A}$ l'ensemble complémentaire de A.

- $A \cup \bar{A} = E$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Exercice

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des élements de E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \bar{B}$;
2. $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$;
3. $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$;
4. $f \in C \backslash A$;
5. $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
6. $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Section 3

Fonctions

Définition

Une fonction est un triplet d'ensembles $f = (E, F, \Gamma)$ vérifiant :

- $\Gamma \subset E \times F$
- $\forall x \in E, \exists!\ y \in F, (x, y) \in \Gamma$
  (se lit : pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.)

Par définition, E est l'ensemble de départ de f, F est l'ensemble d'arrivée f, Γ est le graphe de f.

Pour chaque $x \in E$ on note f(x) l'unique élément de F tel que $(x, f(x)) \in \Gamma$. On dit que f(x) est l'image par x de f, et que x est UN antécédent de $f(x)$ par f.

L'image est unique, mais il peut y avoir plusieurs antécédents.

Limite finie

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

- On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Limite infinie

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 si et seulement si :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

- On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall M_1 > 0, \exists M_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M_2 \implies f(x) < M_1$$

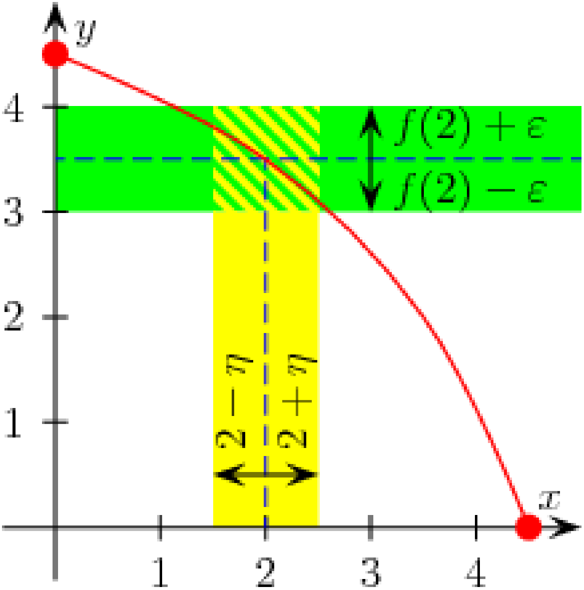
Continuité

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f tend vers $f(x_0)$ en x_0.

On dit que f est continue (sur son ensemble de définition) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x.

Petit exercice : Ecrire mathématiquement que f est continue en x_0.



y
x
4
3
2
1
1
2
3
4
f(2) + ε
f(2) − ε
2 − η
2 + η

Exercices

1. Soit f : R → R. Dire si les propositions suivantes sont vraies :
   - f est continue $\Rightarrow |f|$ est continue
   - $|f|$ est continue $\Rightarrow f$ est continue
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. Que pouvez-vous dire sur la fonction f ?

Dérivée

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \ \ l \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite.

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I, on dit que f est dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f est la fonction f'.

Fonction injective

Soit $f : E \to F$.

On dit que f est **injective** si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe **au plus** un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ce qui s'écrit :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Fonction surjective

Soit $f : E \to F$.

On dit que f est **surjective** si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe **au moins** un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Fonction bijective

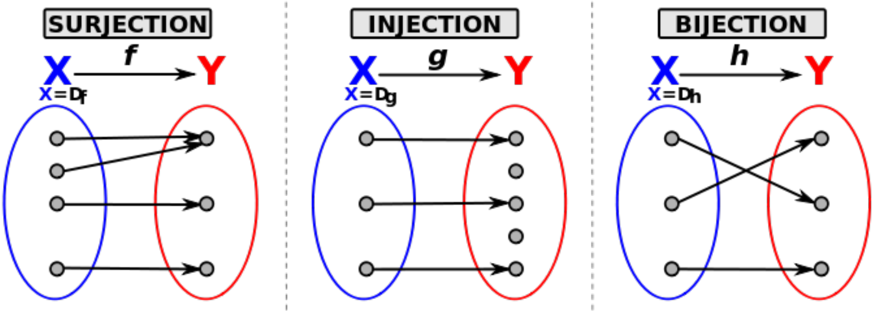
Soit $f : E \to F$.

On dit que f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe **exactement** un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists!\ x \in E, f(x) = y$$

Remarque : Une fonction bijective est à la fois injective et surjective.


SURJECTION
X
f
Y
X=Df
INJECTION
X
g
Y
X=Dg
BIJECTION
X
h
Y
X=Dh

Exercices :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Est-ce que f est injective ? surjective ? Bijective ?
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Est-ce que f est injective ? surjective ? Bijective ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. Est-ce que f est injective ? surjective ? Bijective ?
4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. Est-ce que f est injective ? surjective ? Bijective ?