Méthodologie

Kylliann De Santiago

Lundi 17 Octobre 2022

Comment révisez-vous ?

Quand vous révisez, il faut travailler le cours ET les exercices des TD !

- Les exercices utilisent (voir illustrent) les résultats du cours : théorèmes, lemmes, propositions,... ou les astuces/méthodes des preuves.
- Les exercices que vous aurez en DS/partiel/examen sont souvent proches de ceux vus en TD.
- Travailler sur les exercices vous familisera avec le cours.

Deux raisons qui peuvent faire que vous n'arrivez pas à faire un exercice :

- Vous ne connaissez pas assez votre cours $\Longrightarrow$ Il faut l'apprendre
- Vous n'avez pas vu une astuce à faire.

Savoir $\neq$ Maîtriser !

- Il faut faire et préparer ses TDs pour comprendre et profiter au mieux de la correction.
- En regardant un corrigé, on perd l'apprentissage de beaucoup de détails techniques.

Posez des questions !

Il n'y a pas de questions bêtes, ~~il n'y a que les gens qui les posent qui le sont. . .~~

- Vous avez le droit de vous trompez et de demander pourquoi.
- Si vous vous posez la question, c'est que d'autres se la pose aussi.
- Au passage, ça fait un rappel pour tout le monde.

Temps de révision

Pas de réponse générale

- Soyez honnête avec vous-même.
- Est-ce que je connais bien le cours ?
- Est-ce que je sais refaire tous les exercices que j'ai vus en TD ?
- Si la réponse est non $\implies$ vous n'avez pas assez révisé.

- **N'attendez pas la veille de l'examen pour réviser !**
- Pour réviser efficacement : essayez de vous imposer de réviser au fur et à mesure du semestre.
- Dans l'idéal, à la fin de chaque feuille de TD, vous devez être au point sur toutes les notions de la feuille de TD.
- Retravailler (de temps en temps) les TD précédents.
- Petit rappel : vous avez le droit de poser des questions au responsable du cours ou au chargé de TD.

2. Résolution d'exercices

Quand vous lisez un énoncé, il y a plusieurs réflexes à avoir :

- Lire l'intégralité d'un énoncé d'exercice.
- Comprendre les thèmes abordés : suites, intégrales, dérivées, etc.
- Comprendre où l'exercice souhaite vous amener : repérer ce que les questions suivantes apportent comme information sur les premières.
- Déterminer ce qu'il faut démontrer, l'écrire mathématiquement.
- Déterminer les hypothèses utiles de l'énoncé et les points de courspour répondre à la question.

Stratégie de lecture d'énoncé

Première lecture de l'énoncé pour annotations:

1. Retrouver les thématiques abordées (inscrire les mots clés à coté de l'exercice).
2. Trouver les questions difficiles (***), les questions les plus faciles ($).
3. Evaluer le temps à consacrer à chaque exercice.
4. Indiquer un ordre.

Une fois ce travail effectué, pour résoudre l'exercice, il faut faire un raisonnement formel.

- Question : comment savoir quelles propriétés du cours appliquées à quels moments, et comment trouver les astuces ?
- Pas de réponse miracle, d'où l'importance de s'entrainer à faire des exercices.

- Une technique utile pour savoir quoi faire dans un exercice est de faire un dessin.
- **Un dessin N'EST PAS une preuve**, mais ça peut aider à "guider" vers une preuve.
- le dessin se fait au brouillon, ce n'est pas la peine de le faire sur la copie.
- Challenge (mais important) : réussir à rendre rigoureux ce qui "est évident" sur un dessin.

Activité 1 :

Comment analyser cet exercice ?

Soit $f : x \mapsto x^3$ la fonction cube.

1) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Justifier l'unique solution des équations suivantes :

a) $f(x) = 4$ sur $[1,5\,;\,1,6]$ b) $f(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$

Activité 2 :

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
$x^2 + x + 1 = 0$ s'écrit :

- $x(x+1) = -1$ (1)
- $1 = -x^2 - x$ (2)

Si dans la première équation on substitue le résultat de la deuxième dans le membre de gauche, on obtient : $x(x - x^2 - x) = -1$.
D'où :

$$-x^3 = -1$$

qui n'admet qu'une seule solution : $x = 1$.
Si on reporte cette valeur dans l'équation de départ, nous obtenons :

$$1 + 1 + 1 = 0, \text{ ou encore } 3 = 0$$

Où est l'erreur ?

3. Raisonnement formel

Définition : proposition

Une proposition P est une phrase qui peut être vraie ou fausse.

Exemple

- $P =$ "$1 \leq 3$" est une proposition vraie
- $Q =$ "$2 < 2$" est une proposition fausse.

Activité

Comment prouver la proposition suivante :
Si $n+1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

3.1 L'implication et l'équivalence

Définition : Implication

Soient P, Q deux proposition. on peut définir la proposition $P \implies Q$ (se lit P implique Q).
Elle signifie "si P est vraie alors Q est vraie", ce qui est équivalent à "P est fausse OU Q est vraie" (le OU étant inclusif).

- Beaucoup d'exercices consistent à démontrer qu'une implication est vraie.
- Ici, on note H la proposition correspondante aux hypothèses de l'exercice, et R celle qui correspond au résultat à démontrer.
- Résoudre l'exercice revient à démontrer que la proposition $H \implies R$ est vraie.

Pour démontrer cette implication, il y a trois méthodes :

- On suppose que H est vraie, et on démontre que R est vraie.
- **Contraposée** : on démontre que la proposition $NON(R) \implies NON(H)$ est vraie (en se ramenant à la première méthode).
- **Absurde** : on démontre que la proposition $H\ ET\ NON(R) \implies Faux$ est vraie (càd on suppose que H est vraie et que R est fausse, et on démontre un truc faux).

Implication fausse

Soient P, Q deux proposition, la proposition $P \implies Q$ est fausse lorsque :

$$P \text{ et } NON(Q)$$

Dans les autres cas, $P \implies Q$ est toujours vraie, même si P est fausse.

Négation de l'implication

Soient P, Q deux proposition, on peut définir la négation de la proposition $P \implies Q$:

$$NON(P \implies Q) = P \ \text{ ET } \ NON(Q)$$

Définition : Équivalence

Soient P, Q deux proposition. on peut définir la proposition $P \Leftrightarrow Q$ (se lit P et Q sont équivalentes).
Càd qu'elles ont la même valeur de vérité : elles sont soit toutes les deux fausses, soit toutes les deux vraies.
Pour démontrer que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, il faut démontrer que les propositions $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont toutes les deux vraies.

3.2 Les quanticateurs

Soit une proposition dépendant d'un paramètre $P : E \to \{Vrai, Faux\}$, on peut définir les proposition suivantes :

- $\forall x \in E,\ P(x)$ qui signifie "pour tout $x \in E,\ P(x)$ est vraie"
- $\exists x \in E,\ P(x)$ qui signifie "il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie".

Pour démontrer que la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- Considérer un élément QUELCONQUE $\exists x \in E$, et montrer que $P(x)$ est vraie
- Absurde : montrer que la proposition $\exists x \in E,\ NON(P(x))$ est fausse.

Pour démontrer que la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- Considérer un élément PARTICULIER $\exists x \in E$, et montrer que $P(x)$ est vraie.
- Absurde : montrer que la proposition $\forall\ x \in E,\ NON(P(x))$ est fausse.

Exemple

Soit $P(x) =$ "$x \leq 3$". La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$ est fausse, mais $\exists x \in R,\ P(x)$ est vraie (il suffit de considérer x $=$ 2 par exemple).

Négation

- La négation de $\forall x \in \mathbb{E},\ P(x)$ est $\exists x \in \mathbb{E},\ NON(P(x))$
- La négation de $\exists x \in \mathbb{E},\ P(x)$ est $\forall x \in \mathbb{E},\ NON(P(x))$

Exercice 1

Ecrire les propositions suivantes à l'aide de connecteurs logiques et de quantificateurs, et dire si elles sont vraies ou fausses (sauf pour les 3. et 4.) :

1. Il existe trois réels tous distincts et tous strictement inférieurs à un réel donné arbitraire
2. Il existe un nombre rationnel compris entre $\sqrt{}(2)$ et $\sqrt{}(3)$.
3. La fonction f est croissante (où f : R $\rightarrow$ R est une fonction donnée)
4. La fonction f n'est pas strictement croissante (où f : R $\rightarrow$ R est une fonction donnée)
5. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre égal au carré du premier.
6. On peut associer à n'importe quel réel, un nombre dont le carré est le premier.

Exercice 2

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 2 \implies x^2 \leq 4)$
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,$ n et p sont pairs $\Leftrightarrow n + p$ est pair